

Всероссийская олимпиада школьников 2024-2025 учебный год

Муниципальный этап

Математика

Ответы

11 класс

Продолжительность – 235 минут

Максимальный балл – 35

Задача №1

Ответ: $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

Имеем $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = a$,

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = b$, откуда $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a}$. Осталось

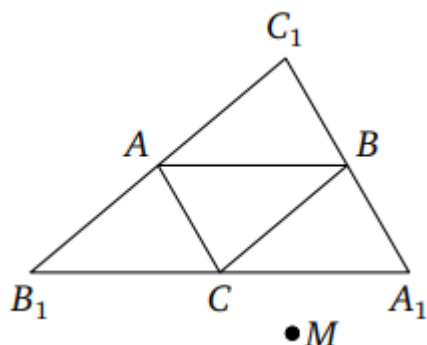
воспользоваться формулой $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

(7 баллов)

Задача №2

Рассмотрим все треугольники с вершинами в данных точках и выберем из них треугольник наибольшей площади (один из них, если таких треугольников несколько). Пусть это треугольник ABC (рис.). Проведём через его вершины прямые, параллельные его противоположным сторонам. Они образуют треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого вдвое больше соответствующих сторон треугольника ABC , поэтому его площадь меньше 4. Покажем, что все 2000 точек должны лежать внутри или на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, пусть это не так и некоторая точка M лежит вне этого треугольника. Тогда точка M и одна из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ лежат по разные стороны относительно одной из сторон этого треугольника. Пусть, например, точка M и вершина C_1 лежат по разные стороны относительно прямой A_1B_1 . Но тогда высота треугольника MA_1B_1 ,

опущенная на сторону AB , больше высоты треугольника CAB , опущенной на ту же сторону. Значит, площадь треугольника ABC не наибольшая. Противоречие.



Ответ: верно

(7 баллов)

Задача №3

Ответ. Не мог. Рассмотрим число $N + 76\,923 \cdot 13N = N + 999\,999N = 1\,000\,000N$. Сумма его цифр равна сумме цифр числа N . Значит, Петя не мог каждый раз получать результат больше предыдущего.

(7 баллов)

Задача №4

Пусть для определённости число 1 попало в первое подмножество, тогда числа $102=101+1$ и $104=103+1$ попадут во второе подмножество, так как числа 101 и 103 простые и больше 100. Но тогда число $3 = 104 - 101$ обязано попасть в первое подмножество, а $106 = 103 + 3$ — во второе. Рассуждая таким образом, мы получим, что все нечётные числа будут в первом подмножестве, а чётные, большие 100, — во втором. Так как числа 103, 105, ..., 201 лежат в первом подмножестве, числа $103-101 = 2$, $105-101 = 4$, ..., $201-101 = 100$ обязаны лежать во втором подмножестве. Таким

образом, мы получили, что искомое разбиение — это разбиение на чётные и нечётные числа.

(7 баллов)

Задача №5

Если бы у каждого человека количество друзей отличалось от количества врагов ровно на 3, то общее количество его знакомых (сумма количеств друзей и врагов) среди собравшихся было бы нечётным. Однако ситуация, в которой у каждого из 17 человек будет нечётное количество знакомых, невозможна. Действительно, посчитаем количество знакомств. Для этого нужно сложить количество знакомых каждого человека и результат разделить на 2 (так как в каждом знакомстве участвует два человека). Однако сумма 17 нечётных чисел нечётна и на два не делится. Поэтому описываемая в условии задачи ситуация невозможна.

(7 баллов)