

Всероссийская олимпиада школьников 2024-2025 учебный год

Муниципальный этап

Математика

Ответы

9 класс

Продолжительность – 235 минут

Максимальный балл – 35

Задача №1

Пусть у Пети x монет достоинством 1 руб., y — 2 руб., z — 5 руб. Тогда $x + y + z = 1000$, $x + 2y + 5z = 2000$. Вычтем из второго равенства первое, умноженное на 2. Получим, что $x = 3z$. Таким образом, число x не меньше 10 и делится на 3, значит, оно составное.

(7 баллов)

Задача №2

Например, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 16.

(7 баллов)

Задача №3

Не существует.

Первое решение. Пусть в некотором треугольнике ABC выполняются неравенства $AN \geq \frac{3}{2}BC$ и $CK \geq \frac{3}{2}AB$, где AN и CK — медианы. Заметим, что $AN < \frac{1}{2}(AB + AC)$, так как $AN < AL + LN$ и $LN = AB/2$, если L — середина стороны AC . Значит, $\frac{1}{2}(AB + AC) > \frac{3}{2}BC$. Аналогично $\frac{1}{2}(CA + CB) > \frac{3}{2}AB$. Сложив эти два неравенства, получаем $\frac{1}{2}(AB + BC) + AC > \frac{3}{2}(AB + BC)$, или $AC > AB + BC$. Это невозможно по неравенству треугольника. Противоречие.

Второе решение. Опять предположим, что в треугольнике ABC выполняются неравенства $AN \geq \frac{3}{2}BC$ и $CK \geq \frac{3}{2}AB$. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $MN = \frac{1}{3}AN$, поэтому $MN \geq \frac{1}{2}BC$. Это значит, что точка M лежит вне окружности с центром N и радиусом $\frac{1}{2}BC$ (иначе говоря, окружности с диаметром BC) или на ней, поэтому $\angle BMC \leq 90^\circ$. Аналогично $\angle BMA \leq 90^\circ$. Но тогда $\angle AMC \geq 180^\circ$. Противоречие.

(7 баллов)

Задача №4

Разобьём числа на пары: a и $c^2 - a$, b и $a^2 - b$, c и $b^2 - c$. В каждой паре сумма чисел положительна, поэтому в каждой паре не более одного отрицательного числа. Значит, всего отрицательных чисел не более трёх. Три числа из шести могли оказаться отрицательными, например, если числа a , b , c отрицательны.

(7 баллов)

Задача №5

Утверждение задачи равносильно тому, что угол между лучом KA и хордой KN измеряется половиной заключённой между ними дуги KN окружности, описанной около треугольника KMN , т. е. равняется вписанному углу KMN . Но этот угол есть угол BMN , равный углу BCN , поскольку они вписаны в окружность, описанную около трапеции, и опираются на одну её дугу BN . Наконец, равенство $\angle AKN = \angle BCN$ сразу следует из параллельности сторон трапеции.

(7 баллов)