

Всероссийская олимпиада школьников 2024-2025 учебный год

Муниципальный этап

Математика

Ответы

8 класс

Продолжительность – 235 минут

Максимальный балл – 35

Задача №1

Обозначим монеты (и их веса) через a , b , c , d . Первым взвешиванием сравним веса a и b . Пусть $a \neq b$ (например, $a < b$). Тогда монеты c и d настоящие, а фальшивая находится среди a и b . Чтобы найти её, взвесим монеты a и c . Если $a = c$, то фальшивая монета — b , и она более тяжёлая, так как $a < b$. Если же $a \neq c$, то фальшивая монета — a , причём снова можно определить, легче она настоящей или тяжелее. Аналогично поступаем и в том случае, если после первого взвешивания $a = b$, т. е. фальшивая монета находится среди c и d . Однако теперь нам не удастся выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета. В самом деле, если $a=b$, то для расположения фальшивой монеты остается 4 разных возможности, в то время как 1 взвешивание может иметь лишь 3 разных исхода.

(7 баллов)

Задача №2

1 при n четном и 7 при n нечетном. (разложить степени 7 и понять, на какие цифры оканчиваются все степени 7: 7 (остаток 7), 49 (остаток 1), 343 (остаток 7), 2401 (остаток 1), 16807 (остаток 7) и т.д.)

(7 баллов)

Задача №3

Прямая, проходящая через середины катетов, делит высоту CH пополам, поэтому $P \in MN$, где M и N — середины катета и гипотенузы, т. е.

MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 171). Тогда MN параллельно $BC \Rightarrow \angle P = \angle BCH \Rightarrow 4BCH = 4NPH$ ($\angle CHN = \angle PHN = 90^\circ$, $CH = PH$) $\Rightarrow BH = NH \Rightarrow CN = CB = a$. Но CN — медиана прямоугольного треугольника, поэтому $CN = BN$, следовательно, треугольник BCN равносторонний, а значит, $\angle B = 60^\circ$.

(7 баллов)

Задача №4

Нельзя. Достаточно заметить, что при указанных операциях из пары чисел, отличающихся на 1, получается пара чисел, отличающихся на 1.

(7 баллов)

Задача №5

Предположим, что искомое число (назовём его M) нашлось. Напомним признак делимости на 9: «Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9». Рассмотрим в числе M две соседние цифры a и b . Обозначим через M_a число, которое получается из M вычёркиванием цифры a . Обозначим через M_b число, которое получается из M вычёркиванием цифры b . Числа M_a и M_b отличаются лишь одной цифрой (в M_a осталась цифра b , а в M_b осталась цифра a), и у обоих этих чисел сумма цифр делится на 9. Поэтому цифры a и b одинаковые (так как они не нули). Так как a и b — две произвольные соседние цифры, в каждой паре соседние цифры одинаковы. Значит, в числе M все цифры одинаковы. Пусть они равны d . Заметим, что $d \neq 9$, так как в этом случае число M делилось бы на 9. Теперь рассмотрим число, состоящее из 29 цифр d . Его сумма цифр равна $29d$, что не делится на 9. Противоречие, следовательно, такого числа не существует.

(7 баллов)